Coxeter 群の "同変 Schubert calculus" と hook公式の拡張

成瀬　弘　(岡山大・教育)*

概　要

ここでは、一般の Coxeter 群に対して同変 Schubert 類を定めて、その Schubert calculus を考える。応用として、hook 公式の拡張を得る。

1. Coxeter 群のルート系

文献 [3] に従って、Coxeter 群のルート系を定める。ここでは簡単のため S は有限集合と仮定するが、一般の場合にも拡張できる。

$V = \mathbb{R}^{|S|}$ 上の標準双線形形式 $B(\ ,\ )$ を 基底 $\{e_s\}_{s\in S}$ に対して、

$$B(e_s, e_{s'}) = \begin{cases} -\cos(\frac{\pi}{m_{s,s'}}) & m_{s,s'} < \infty \\ -1 & m_{s,s'} = \infty \end{cases}$$

で定める。ここで $m_{s,s'}$ は、ss' の位数とする。これを用いて、W の標準表現を $s \in S, x \in V$ に対して、$\rho(s)(x) = x - 2B(x, e_s)e_s$ で定めることで W の表現 $\rho : W \to GL(V)$ が得られる。この作用を $w(x)$ で表す。各生成元 $s \in S$ の共役類ごとに、実数 $p_s > 0$ を用意して、単純ルートを $\alpha_s = p_s e_s (s \in S)$ で定める。ルート系を $R = \{w(\alpha_s)\}_{w\in W, s\in S}$ とし、そのうちで R^+ を正ルートの集合とする。また $v \in W$ に対して、$R_v := R^+ \cap vR^-$ と定める。$v = s_1 s_2 \cdots s_\ell$ を生成元 S による最短表示とし、$\beta_k := s_1 s_2 \cdots s_{k-1}(\alpha_{s_k})$ $(i = 1, 2, ..., \ell)$ とおくと $R_v = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\ell\}$ となる。単純コルートを、$\alpha_s^\vee = \frac{2\alpha_s}{B(\alpha_s, \alpha_s)}$ と定め、$\beta = w(\alpha_s)$ のとき、$\beta^\vee = w(\alpha_s^\vee)$ と定める。基本 weight $\Lambda_s \in V^*, (s \in S)$ を、$< \alpha_s^\vee, \Lambda_{s'} >= \delta_{s,s'}$ で定める。

2. 同変 Schubert 類、Chevalley 公式

Goresky, Kottwitz と MacPherson　によるトーラス同変コホモロジーの局所化定理で、固定点での同変コホモロジーの直積の部分空間に埋め込むことができる。cf.[2]。この類似物を Coxeter 群でも構成できる。

命題 1 (Billey 型公式) v の最短表示 $v = s_1 s_2 \cdots s_\ell$ と w に対して、

$$\sum_{(j_1, j_2, ..., j_r)\in J^w} \beta_{j_1}\beta_{j_2}\cdots\beta_{j_r}$$

は、最短表示の選び方によらず v と w で定まる。ここで J^w は、$1 \le j_1 < j_2 < ... < j_r \le \ell$ で、$s_{j_1}\cdots s_{j_r} = w$ が最短表示となる列 $(j_1, j_2, ..., j_r)$ の全体。

2010 Mathematics Subject Classification: 20F55,05E15,14N15
キーワード：Coxeter group, Schubert calculus, equivariant cohomology, hook formula
* 〒700-8530 岡山市北区津島中３－１－１岡山大学大学院教育学研究科
e-mail: rdcv1654@cc.okayama-u.ac.jp
web: http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/

これを$\xi^w|_v$と表す。これにより、$\xi^w : W \to S_{\mathbb{R}}(V)$が定まる。この命題の証明は、StembridgeによるCoxeter-Yang-Baxter 関係式から導かれる。cf.[1],[7]。

$\gamma \in R^+$と$w, v \in W$に対して、$v = ws_\gamma$かつ$\ell(v) = \ell(w) + 1$であることを$v \overset{\gamma}{\succ} w$で表す。($\gamma = w(\alpha_s)$のとき、$s_\gamma = wsw^{-1}$とおく。)

定理 1 (同変 Chevalley 型公式)$s \in S$と$w \in W$に対して、

$$\xi^s \xi^w = (\xi^s|_w)\, \xi^w + \sum_{v \overset{\gamma}{\succ} w} < \gamma^\vee, \Lambda_s > \xi^v$$

3. hook公式の拡張

$v \in W$に対して、区間$[e, v) = \{w \in W \mid e \le w < v\}$上の関数$f : [e, v) \to S$で次を満たすものが存在する。　　　$\forall w \in [e, v)$について$\xi^{f(w)}|_v - \xi^{f(w)}|_w \neq 0$
これを用いて、$F(v, w, f(w)) = \xi^{f(w)}|_v - \xi^{f(w)}|_w$と定める。

定理 2 $v \in W$に対して次が成立する。

$$\prod_{\beta \in R_v} \frac{1}{\beta} = \sum_{v = v_0 \overset{\gamma_1}{\succ} v_1 \overset{\gamma_2}{\succ} v_2 \cdots \overset{\gamma_\ell}{\succ} v_\ell = e} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{< \gamma_i^\vee, \Lambda_{f(v_i)} >}{F(v, v_i, f(v_i))}$$

WがWeyl群の場合は[4]に既出。定理2の等式は、Parabolic quotient W/W_Pに対しても作ることができてA型の極大Parabolic部分群の場合には通常のhook公式となっている。cf.[5],[6] また、区間$[w, v]$で同様の公式を作るとskew Young図形のhook 公式が作れる。

4. K-theory 類似

cohomology の代わりにK-theoryにあたるものを同様に考えることができる。但し、この場合には整数性が必要となりCoxeter 群は、結晶型のものに限られてしまう。A型とD型のグラスマンの場合についてはK-theory版のhook公式を得る。

参考文献

[1] S.Billey, Kostant polynomials and cohomology ring for G/B, Duke Math. J. 96 (1999), 205–224.

[2] M.Goresky, R.Kottwitz and R.MacPherson, Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem, Invent. Math. 131 (1998), 25–83.

[3] H.Hiller, Geometry of Coxeter groups. Pitman 1982.

[4] L.C.Mihalcea, On equivariant quantum cohomology of homogeneous spaces: Chevalley formulae and algorithms. Duke Math. J. 140 (2007), 321–350.

[5] K.Nakada, Colored hook formula for a generalized Young diagram. Osaka J. Math. 45 (2008), 1085–1120.

[6] H.Naruse, Schubert calculus for Coxeter groups and hook formula, in preparation.

[7] J.Stembridge, Coxeter-Yang-Baxter Equation? preprint.